SIGNALS AND SYSTEMS

信号与系统

第二章 连续时间信号与系统的时域分析

南京邮电大学

通信与信息工程学院

第二章 连续时间信号与系统的时域分析

2.1.1 复指数信号

复指数信号 Ae^{st}

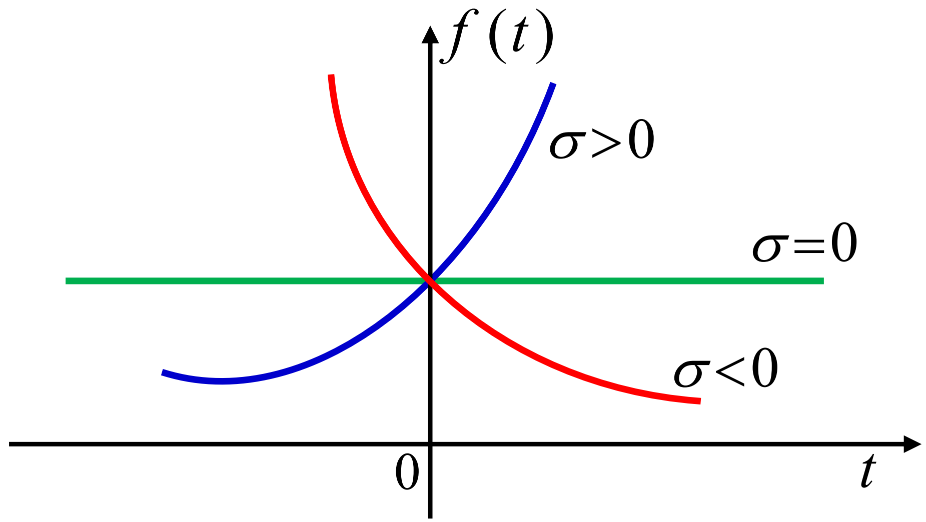
$A = |A|e^{j\theta}$，为复振幅

$s = \sigma + j\omega$，为复频率

- 复指数信号可用来表示多种信号：

(1) 当A为实数，$s=0$ 时，$Ae^{st}=A$ 为直流信号。

(2) 当A为实数，$\omega=0$ 时，$Ae^{st} = Ae^{\sigma t}$ 为单调增长或衰减的实指数信号。



2.1.1 复指数信号

(3) 当A为复数，$\sigma=0$ 时，

$$Ae^{st}=Ae^{j\omega t}=|A|\cos(\omega t+\theta)+j|A|\sin(\omega t+\theta)$$

实部为等幅余弦信号，虚部为等幅正弦信号。

正弦信号和余弦信号仅在相位上相差 $\frac{\pi}{2}$，统称为正弦信号。

(4) 一般情况下，

$$Ae^{st}=Ae^{\sigma t}e^{j\omega t}=|A|e^{\sigma t}\cos(\omega t+\theta)+j|A|e^{\sigma t}\sin(\omega t+\theta)$$

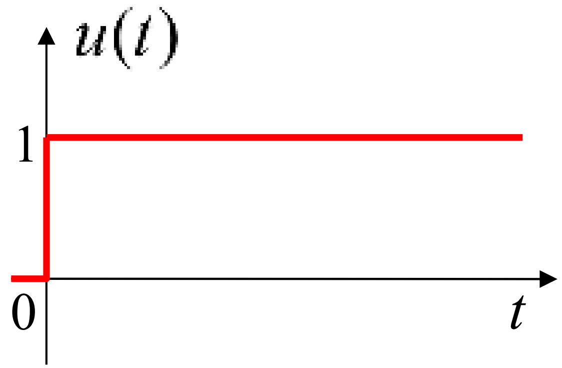
实部为增长$(\sigma>0)$或衰减$(\sigma<0)$的余弦信号，

虚部为增长$(\sigma>0)$或衰减$(\sigma<0)$的正弦信号。

2.1.2 单位阶跃信号

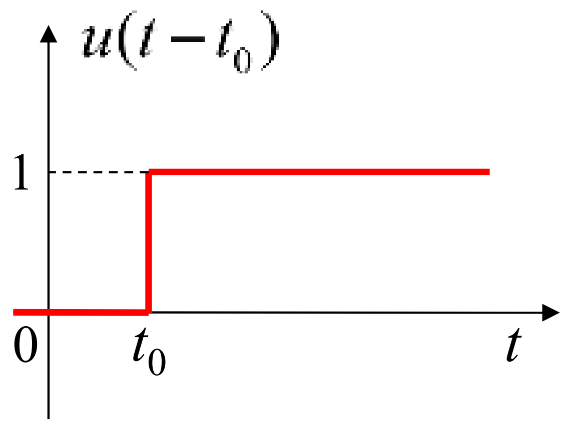
单位阶跃信号：

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

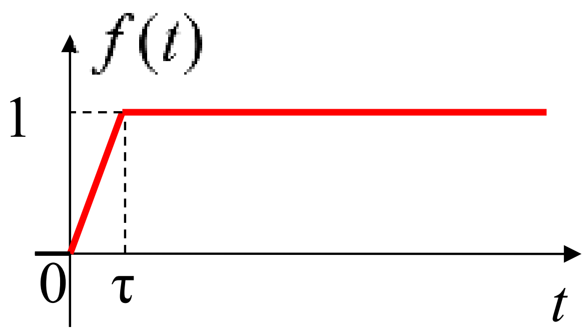


延迟单位阶跃信号：

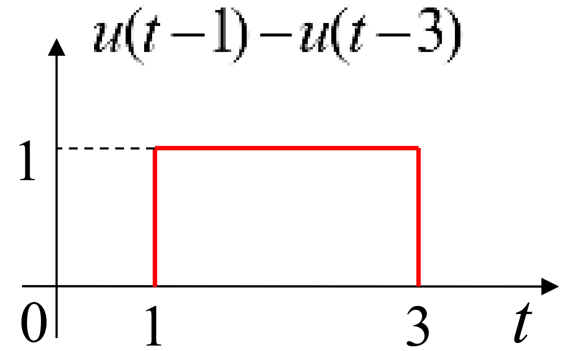
$$u(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases}$$

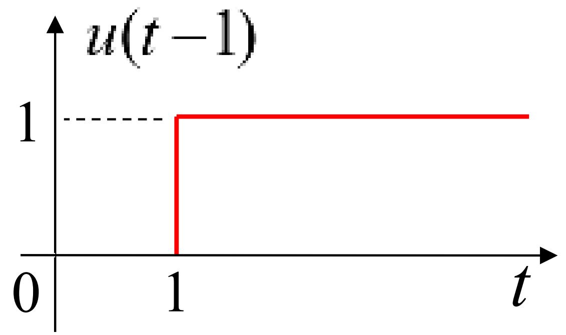


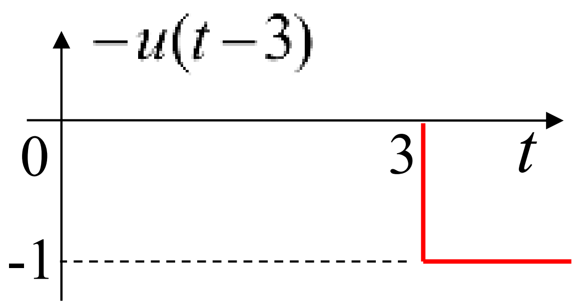
单位阶跃信号可以看作某些在极短的时间**τ**内由**0**变到**1**的信号当**τ→0**的极限：

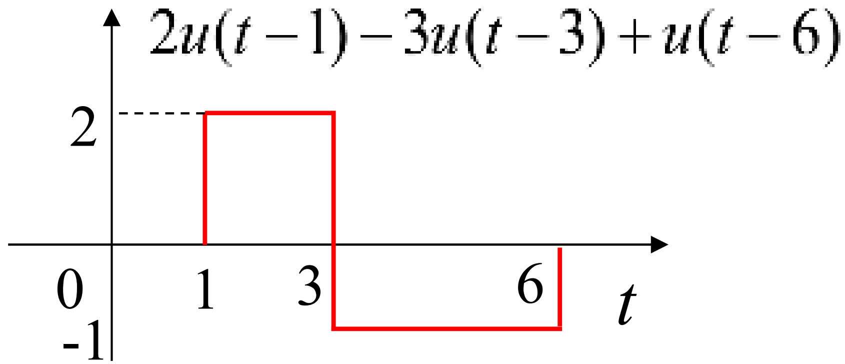


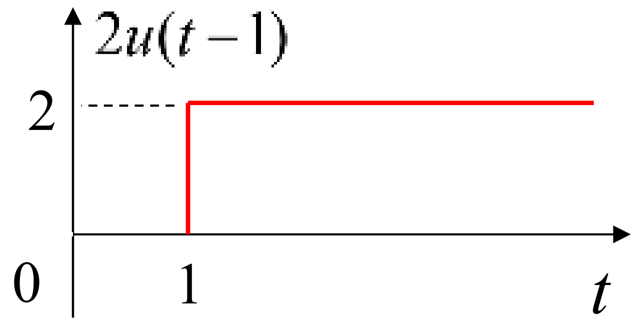
应用阶跃信号和延迟阶跃信号，可以表示任意的矩形信号。

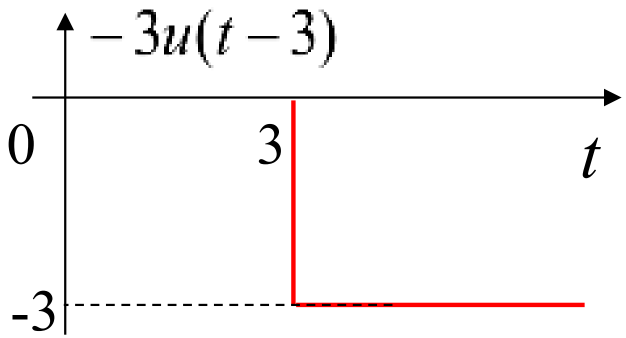


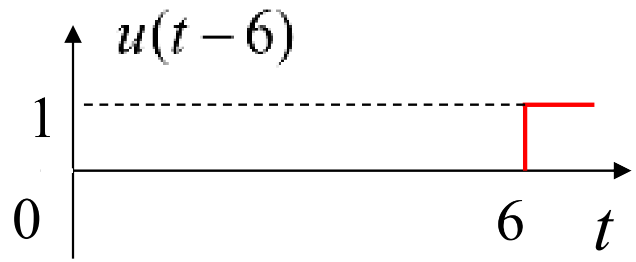






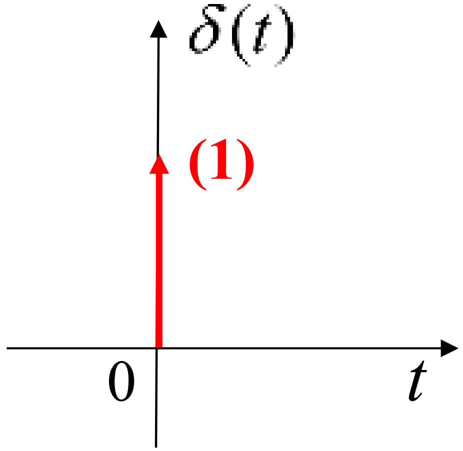






2.1.3 单位冲激信号

1 .单位冲激信号的定义（有三种定义方式）

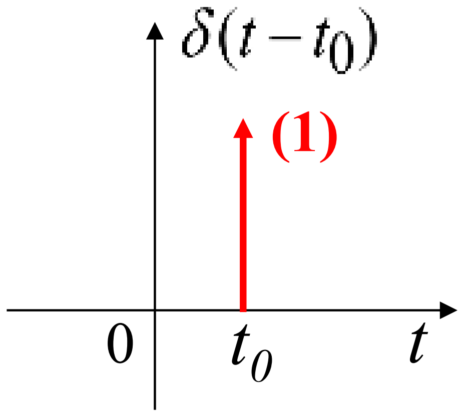


(1) 工程定义：

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases} \quad 和 \quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

两个特点：(1)出现时间极短

(2)面积为**1**



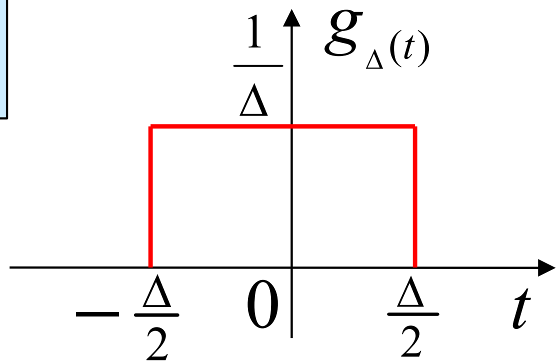
延迟单位冲激信号

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}0 & t\neq t_0\\ \infty & t=t_0\end{cases} \quad 和 \quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1$$

2.1.3 单位冲激信号

(2) 单位冲激信号可以看成是某些普通函数的极限：

$$\boxed{\lim_{c\to 0} f_c(t) = \delta(t)}$$



$$\lim_{\Delta\to 0} g_{\Delta}(t) = \delta(t)$$

(3) 严格的数学定义：

作为一个广义函数，单位冲激函数 $\delta(t)$ 作用于任意在 $t=0$ 时连续的普通函数 $\varphi(t)$ 的效果是对 $\varphi(t)$（测试函数或赋值函数）赋于下面的值：

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta(t)dt =}\int_{0^-}^{0^+}\varphi(t)\delta(t)dt = \varphi(0)\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt = \boxed{\varphi(0)}$$

2 .冲激函数的性质

（1）筛选特性：

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t-t_0)dt = \varphi(t_0)}$$

证明： $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t-t_0)dt \xrightarrow{x=t-t_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t_0)\delta(x)dx = \varphi(t_0)$

例如： $\int_{-\infty}^{\infty} \sin \pi t\delta(t)dt = \sin \pi t\Big|_{t=0} = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin \pi t\delta(t-\frac{1}{4})dt = \sin \pi t\Big|_{t=\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{0}^{\pi} \sin t\delta(t-\frac{\pi}{6})dt = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

注意： $\int_{1}^{2} e^{-at}\delta(t)dt = 0$

在积分区间(1,2)内，被积函数为0

2.1.3 单位冲激信号

（2）抽样特性：

$$\boxed{f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)}$$

证明：$\int_{-\infty}^{\infty}[f(t)\delta(t-t_0)]\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)[f(t)\varphi(t)]dt=f(t_0)\varphi(t_0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f(t_0)\delta(t-t_0)]\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)[f(t_0)\varphi(t)]dt=f(t_0)\varphi(t_0)$$

两个广义函数对测试函数$\varphi(t)$有相同的赋值效果，故它们二者等价。

特别地，当 $t_0=0$，有 $\boxed{f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)}$

例如：$\sin\pi t\delta(t)=\sin\pi t\big|_{t=0}\delta(t)=0$

$$\sin\pi t\delta(t-\frac{1}{4})=\sin\pi t\big|_{t=\frac{1}{4}}\delta(t-\frac{1}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}\delta(t-\frac{1}{4})$$

2.1.3 单位冲激信号

(3) 单位冲激函数为偶函数：

$$\boxed{\delta(-t) = \delta(t)}$$

证明：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-t)\varphi(t)dt \xrightarrow{\tau=-t} = \int_{\infty}^{-\infty} \delta(\tau)\varphi(-\tau)(-d\tau)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\varphi(-\tau)d\tau = \varphi(0^{-}) = \varphi(0)$$

又 $\because \quad \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t)dt$

$\therefore \quad \delta(-t) = \delta(t)$

(4) 尺度变换：

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t) \quad \text{和} \quad \delta(at-t_0)=\frac{1}{|a|}\delta(t-\frac{t_0}{a})$$

a,t_0 为常数且$a\neq 0$

证明：令$at=x$,

当$a>0$时，$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at)\varphi(t)dt=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\varphi(\frac{x}{a})dx=\frac{1}{a}\varphi(0)$

当$a<0$时，$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at)\varphi(t)dt=\int_{\infty}^{-\infty}\delta(x)\varphi(\frac{x}{a})d(\frac{x}{a})$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a}\varphi(\frac{x}{a})\delta(x)dx=-\frac{1}{a}\varphi(0)=\frac{1}{|a|}\varphi(0)$$

又$\because$ $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|a|}\varphi(t)\delta(t)dt=\frac{1}{|a|}\varphi(0)$ 　　故$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$

同理可证：$\delta\,(at-t_0)=\frac{1}{|a|}\delta(t-\frac{t_0}{a})$

(5) 单位阶跃函数的导数是单位冲激函数：

证明：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{du(t)}{dt}dt=\varphi(t)u(t)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}u(t)d\varphi(t)=\varphi(\infty)-\int_{0}^{\infty}d\varphi(t)$$

$$=\varphi(\infty)-[\varphi(\infty)-\varphi(0)]=\varphi(0)$$

故 $$\frac{du(t)}{dt}=\delta(t)$$

另外，$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d(\tau)=\begin{Bmatrix}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{Bmatrix}=u(t)$$

此结论解决了不连续函数在间断点处的求导问题。

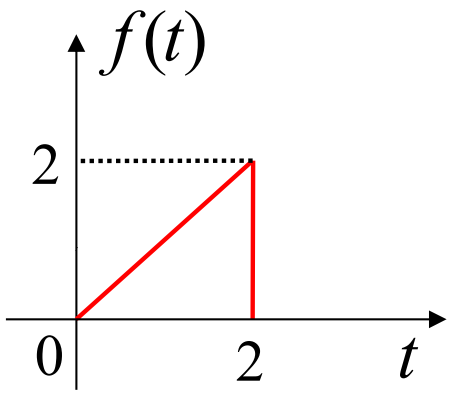
例2-1-1 已知 $f(t)$ 的波形如图所示，试求 $f'(t)$，并画出其波形图。

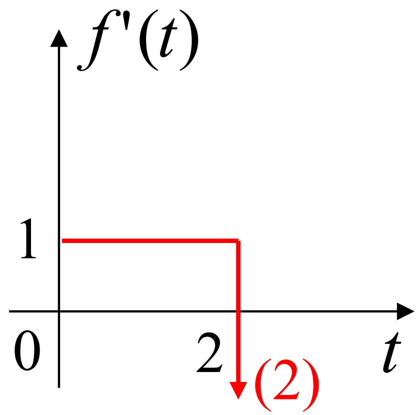
解：

$$f(t)=t[u(t)-u(t-2)]$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= [u(t)-u(t-2)]+t[\delta(t)-\delta(t-2)] \\ &= [u(t)-u(t-2)]-2\delta(t-2) \end{aligned}$$

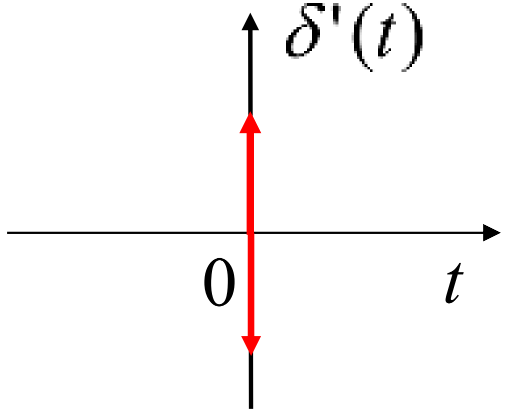
波形如下图：





2.1.4 冲激偶信号

单位冲激函数的一阶导数 $\delta'(t)$ 称为单位二次冲激函数或冲激偶，图形符号如下：



可以证明：

1. 筛选特性：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\varphi(t)dt=-\varphi'(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t-t_0)\varphi(t)dt=-\varphi'(t_0)$$

2. 抽样特性：

$$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$$

$$f(t)\delta'(t-t_0)=f(t_0)\delta'(t-t_0)-f'(t_0)\delta(t-t_0)$$

例如：$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\sin\pi t dt=-\pi\cos\pi t\Big|_{t=0}=-\pi$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t-\frac{1}{4})\sin\pi t dt=-\pi\cos\pi t\Big|_{t=\frac{1}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

$$\sin\pi t\delta'(t)=\sin\pi t\Big|_{t=0}\delta'(t)-\pi\cos\pi t\Big|_{t=0}\delta(t)=-\pi\delta(t)$$

$$\sin\pi t\delta'(t-\frac{1}{4})=\sin\pi t\Big|_{t=\frac{1}{4}}\delta'(t-\frac{1}{4})-\pi\cos\pi t\Big|_{t=\frac{1}{4}}\delta(t-\frac{1}{4})$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\delta'(t-\frac{1}{4})-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\delta(t-\frac{1}{4})$$

此外，还可以定义 $\delta(t)$ 的 n 阶导数 $\delta^{(n)}(t)$

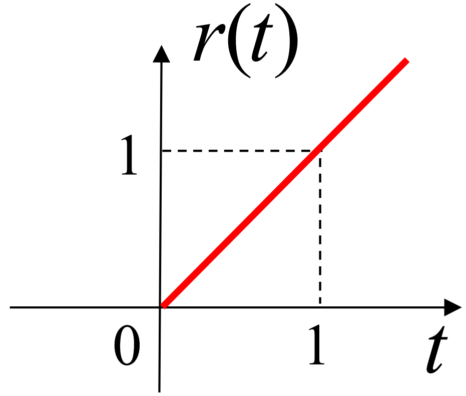
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(t)\varphi(t)dt=(-1)^{(n)}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\varphi^{(n)}(t)dt$$

$$=(-1)^{(n)}\varphi^{(n)}(0)$$

2.1.5 斜坡信号

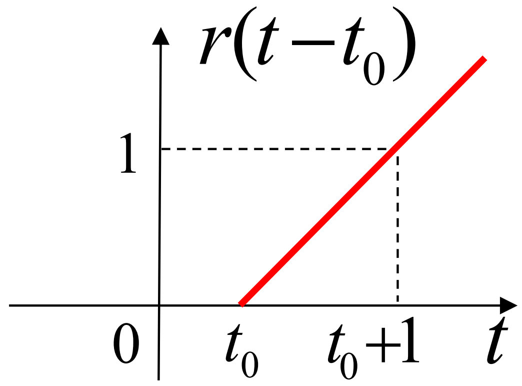
单位斜坡信号：

$$r(t)=\begin{cases} t & t\ge 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$



延迟单位斜坡信号：

$$r(t-t_0)=\begin{cases} t & t\ge t_0 \\ 0 & t<t_0 \end{cases}$$



- 单位斜坡信号和单位阶跃信号、单位冲激信号的关系：

$$\frac{dr(t)}{dt}=u(t) \qquad \frac{du(t)}{dt}=\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t} u(\lambda)d\lambda=r(t) \qquad \int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda)d\lambda=u(t)$$

第二章 连续时间信号与系统的时域分析

- 2.1 典型的连续时间信号
- 2.2 连续时间信号的基本运算
- 2.3 信号的时域分解
- 2.4 连续时间系统的零输入响应
- 2.5 连续系统的冲激响应
- 2.6 连续系统的零状态响应
- 2.7 连续时间系统的全响应
- 作业

2.2.1 替换自变量的运算

2.2.2 信号的导数与积分

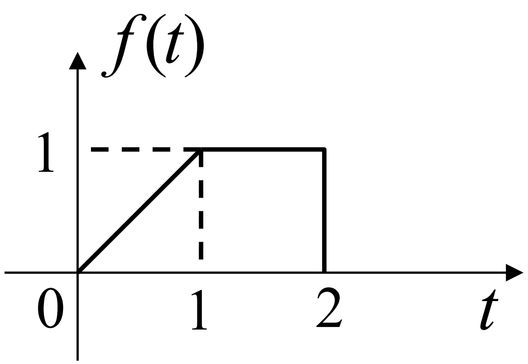
2.2.3 信号的相加与相乘

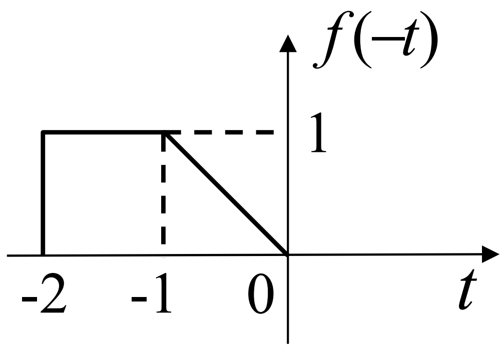
2.2.1 替换自变量的运算

1. 翻转（折叠）：

$$f(t) \xrightarrow{t \to -t} f(-t)$$

从波形上看，$f(t)$ 是 $f(-t)$ 的波形相对于纵轴的镜像。



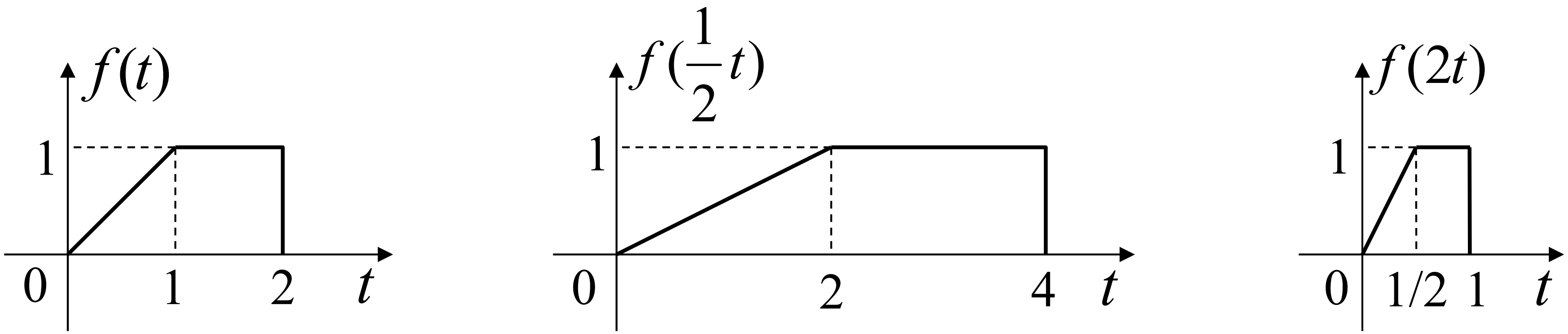


2. 尺度变换：

$$f(t) \xrightarrow{t \to at} f(at)$$

当 $a>0$ 时，从波形上看，$f(at)$ 是把 $f(t)$ 的波形以坐标原点为基准，沿时间轴压缩（或扩展）至原来的 $1/a$ 倍。

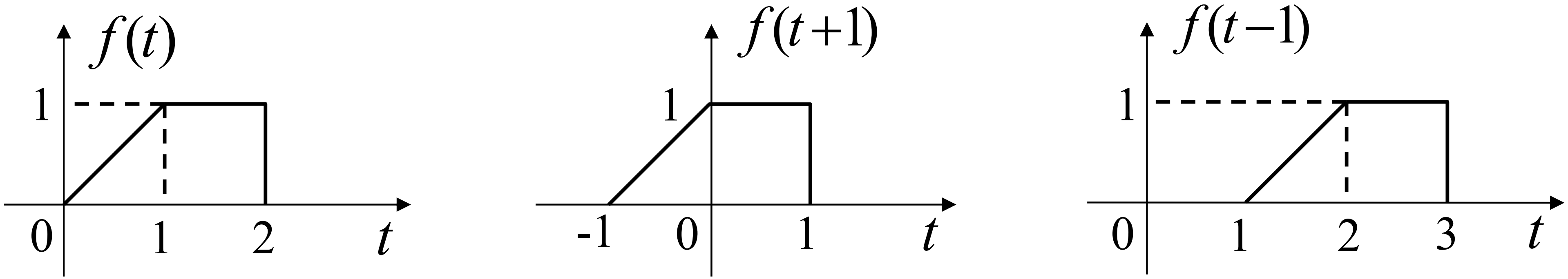
当 $a<0$ 时，可以看成翻转后再进行上述变换。



3. 时移：

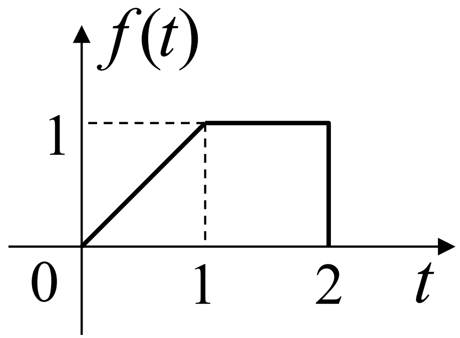
$$f(t) \xrightarrow{t \to t \pm t_0} f(t \pm t_0) \quad (t_0 > 0)$$

从波形上看，是把 $f(t)$ 的波形向左（右）移动



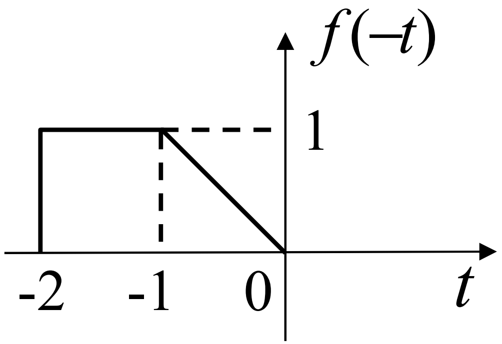
2.2.1 替换自变量的运算

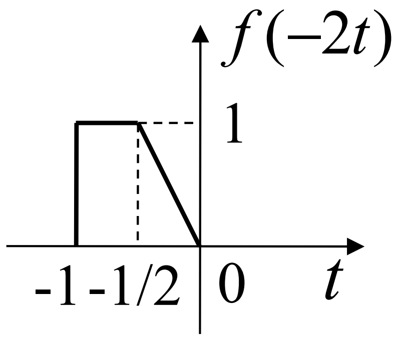
例2-3-1 已知信号$f(t)$的波形如图所示，画出$f(-2t+2)$的波形。

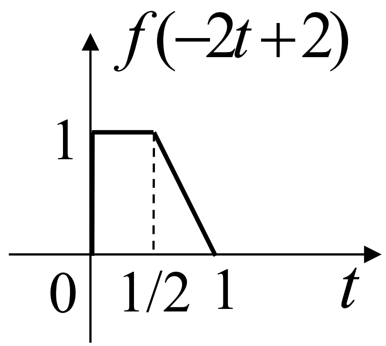


解法一：　$f(-2t+2)=f\left[-2\left(t-1\right)\right]$

运算顺序：翻→压→移

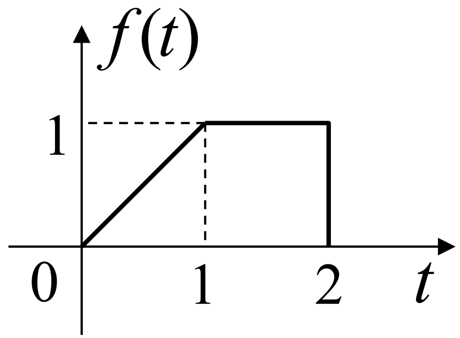






2.2.1 替换自变量的运算

例2-3-1 已知信号$f(t)$的波形如图所示，画出$f(-2t+2)$的波形。



解法二：

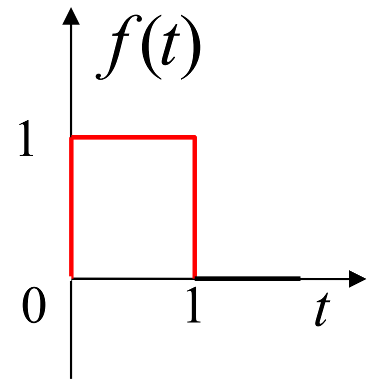
本例也可以用函数的基本定义解，注意定义域中的t也要替换。

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & 0<t<1\\ 1 & 1<t<2\\ 0 & t>2\end{cases} \Rightarrow f(-2t+2)=\begin{cases}0 & -2t+2<0\\ -2t+2 & 0<-2t+2<1\\ 1 & 1<-2t+2<2\\ 0 & -2t+2>2\end{cases}=\begin{cases}0 & t>1\\ -2t+2 & 0.5<t<1\\ 1 & 0<-t<0.5\\ 0 & t<0\end{cases}$$

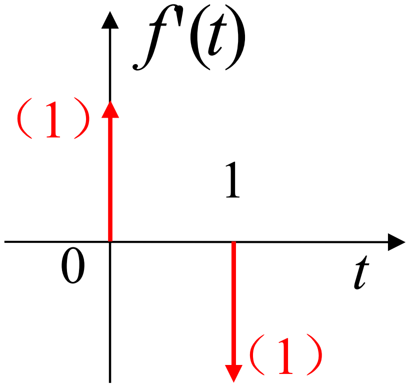
2.2.2 信号的导数与积分

1. 信号的导数：

记作 $\dfrac{df(t)}{dt}$ 或 $f'(t)$，它的值是信号$f(t)$在任意时刻 t的变化率。



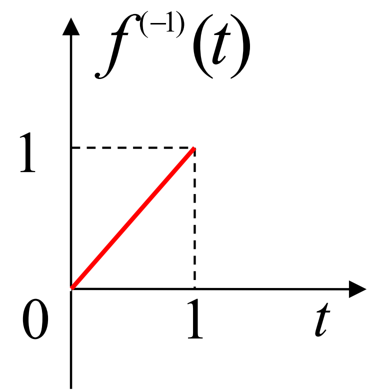
在 $f(t)$ 的不连续点处，导数中会含有**冲激函数**。



2. 信号的积分：

记作 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$ 或 $f^{(-1)}(t)$。

从图形上看，它在任意 t 时刻的值是从 $-\infty$ 到 t 区间，$f(t)$与时间轴所包围的面积。



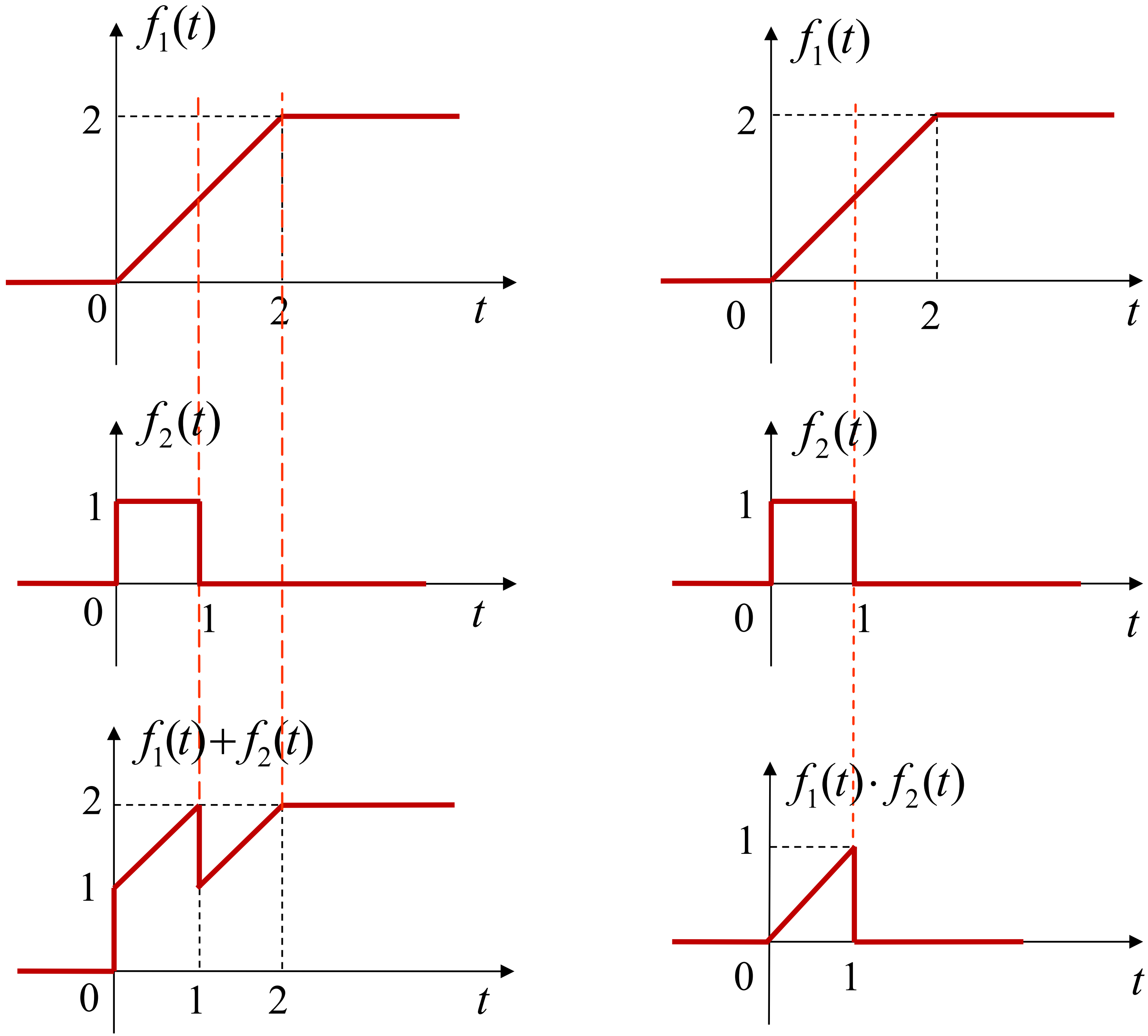
- 常用信号的导数积分关系：

$$r'(t) = u(t) \qquad u'(t) = \delta(t)$$

$$u^{(-1)}(t) = r(t) \qquad \delta^{(-1)}(t) = u(t)$$

2.2.3 信号的相加与相乘

两个信号相加与相乘，是将它们在同一瞬间的值相加或相乘。



第二章 连续时间信号与系统的时域分析

- 2.1 典型的连续时间信号
- 2.2 连续时间信号的基本运算
- 2.3 信号的时域分解
- 2.4 连续时间系统的零输入响应
- 2.5 连续系统的冲激响应
- 2.6 连续系统的零状态响应
- 2.7 连续时间系统的全响应
- 作业

2.3.1 交、直流分解
2.3.2 奇、偶分解
2.3.3 实部、虚部分解
2.3.4 脉冲分解

2.3.1 交、直流分解

信号可以分解为直流分量和交流分量之和：

$$f(t) = f_D(t) + f_A(t)$$

- **直流分量**：指信号在定义域区间上的平均值，对应于信号中不随时间变化的稳定分量。
- **交流分量**：除去直流分量后的部分。

（离散信号类似，*t* 换成*k*）

2.3.2 奇、偶分解

任意波形的信号也可以分解为偶分量与奇分量之和：

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2}[x(t)+x(t)+x(-t)-x(-t)] \\
&= \frac{1}{2}[x(t)+x(-t)]+\frac{1}{2}[x(t)-x(-t)] \\
&= x_e(t)+x_o(t)
\end{aligned}
$$

（离散信号类似，***t*** 换成***k***）

2.3.3 实部、虚部分解

如果是复数信号，可以分解为实部分量 $f_r(t)$ 和虚部分量 $f_i(t)$ 两部分：

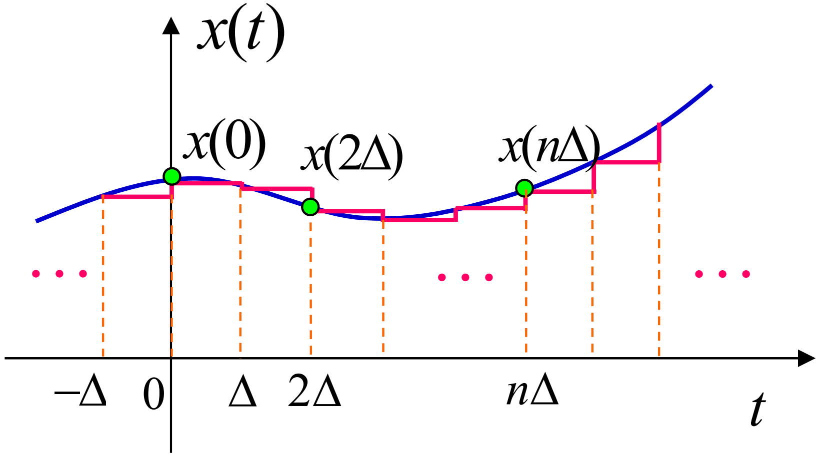
$$f(t)=f_r(t)+f_i(t)$$

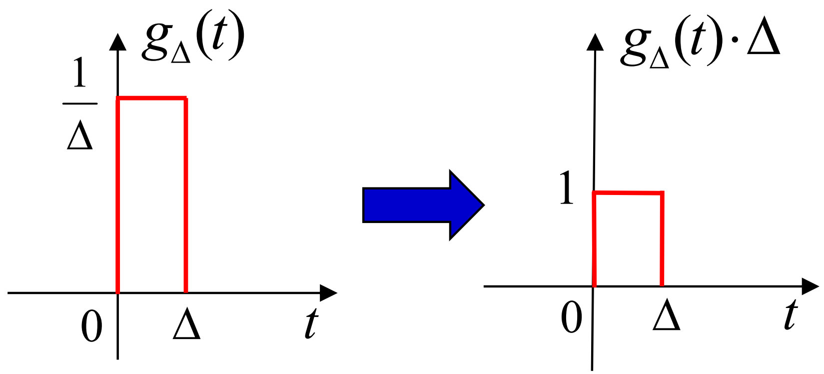
（离散信号类似，t 换成k）

2.3.4 脉冲分解

1. 连续信号分解为单位冲激信号的线性组合

定义如下矩形脉冲，显然 $\lim_{\Delta\to 0} g_\Delta(t) = \delta(t)$





各个时刻出现的矩形脉冲可表示如下：

$$t=0 \qquad x(0)g_\Delta(t)\Delta$$

$$t=\Delta \qquad x(\Delta)g_\Delta(t-\Delta)\Delta$$

$$t=2\Delta \qquad x(2\Delta)g_\Delta(t-2\Delta)\Delta$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$t=n\Delta \qquad x(n\Delta)g_\Delta(t-n\Delta)\Delta$$

折线可以看作这些矩形脉冲的叠加，即

$$x(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta)g_\Delta(t-n\Delta)\Delta$$

$$x(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta) g_\Delta(t-n\Delta)\Delta \quad \Rightarrow \quad x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta) g_\Delta(t-n\Delta)\Delta$$

当$\Delta \to 0$时，Δ记作$d\tau, n\Delta$成为新的连续变量τ，$g_\Delta(t-n\Delta)$成为$\delta(t-\tau)$,求和变成对连续变量τ的积分,

即 $$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

解释：

1. 说明任意波形的信号$x(t)$可以看成是由无穷多个连续出现的冲激信号分量$[x(\tau)d\tau]\delta(t-\tau)$叠加起来构成的。

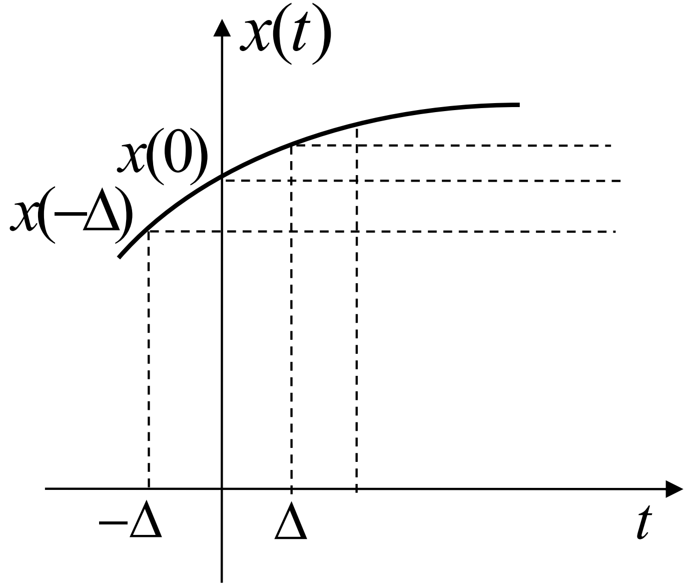
2. 任意波形的信号$x(t)$也可以看成是由无穷多个连续出现的矩形脉冲信号分量$x(\tau)[\delta(t-\tau)d\tau]$叠加起来构成的。

3. τ是积分变量，t是积分参变量（在积分过程中可视为常数），因此，该积分公式也可以直接从单位冲激函数的取样特性得到。

2.5.4 脉冲分解

任意波形的信号也可以近似表示为无穷多个阶跃信号之和（分解过程略）：

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x'(\tau)u(t-\tau)d\tau$$



利用后面将要介绍的卷积性质，可以很方便地证明这一结论。

2. 离散序列分解为单位脉冲序列的线性组合

$$f(k)=\cdots+f(-2)\delta(k+2)+f(-1)\delta(k+1)+f(0)\delta(k)+\cdots$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)\delta(k-n)$$

- 2.1 典型的连续时间信号
- 2.2 连续时间信号的基本运算
- 2.3 信号的时域分解
- 2.4 连续时间系统的零输入响应
- 2.5 连续系统的冲激响应
- 2.6 连续系统的零状态响应
- 2.7 连续时间系统的全响应
- 作业

2.4 连续时间系统的零输入响应

当输入信号为零时，系统的响应称为零输入响应，描述系统的微分方程为齐次微分方程，即

$$a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1 y'(t)+a_0 y(t)=0$$

此时只要根据零输入响应的n个初始条件求解齐次微分方程就可以了。

【例2-4-1】 已知某线性时不变系统的微分方程为

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2x'(t)-x(t),$$

初始条件$y_{zi}(0^+)=5$，$y_{zi}'(0^+)=-7$。

试求系统的零输入响应。

2.4 连续时间系统的零输入响应

【解】 特征方程为 $\lambda^2+3\lambda+2=0$，

解得特征根 $\lambda_1=-1$、$\lambda_2=-2$，零输入响应的形式应为

$$y_{zi}(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t} \qquad (t>0)$$

代入初始条件，得

$$\begin{cases} y_{zi}(0^+)=c_1+c_2=5 \\ y_{zi}{}'(0^+)=-c_1-2c_2=-7 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} c_1=3 \\ c_2=2 \end{cases}$

故 $y_{zi}(t)=3e^{-t}+2e^{-2t} \qquad (t>0)$

第二章 连续时间信号与系统的时域分析

- 2.1 典型的连续时间信号
- 2.2 连续时间信号的基本运算
- 2.3 信号的时域分解
- 2.4 连续时间系统的零输入响应
- 2.5 连续系统的冲激响应
- 2.6 连续系统的零状态响应
- 2.7 连续时间系统的全响应
- 作业

2.5.1 冲激响应的定义

2.5.2 冲激响应的物理解释

2.5.3 冲激响应的求取

2.5 连续系统的冲激响应

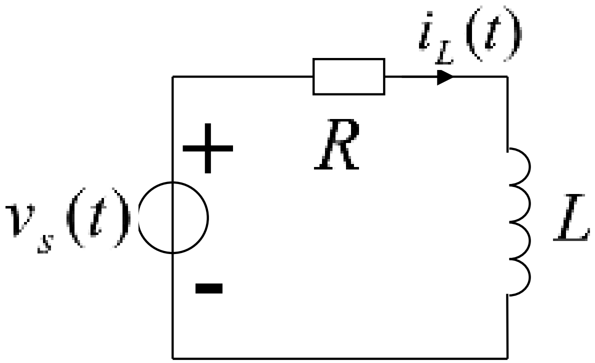
2.5.1 冲激响应的定义

零状态系统在单位冲激信号作用下的响应。

$$\delta(t) \rightarrow \boxed{S\{q_n(0^-)=0\}} \rightarrow h(t)$$

2.5.2 冲激响应的物理解释*

以**RL**串联电路为例：



$$Ri_L(t)+L\frac{di_L(t)}{dt}=v_s(t)$$

当$i_L(0_)=0$，$v_s(t)=\delta(t)$时，则$i_L(t)=h(t)$

即：$$Ri_L(t)+L\frac{di_L(t)}{dt}=\delta(t)$$

2.5 连续系统的冲激响应

对上式从 $t=0^-$ 到 $t=0^+$ 取积分，得

$$R\int_{0^-}^{0^+} i_L(t)dt + Li_L(0^+) - Li_L(0^-) = 1$$

$\because i_L(t)$是有限的，故$\int_{0^-}^{0^+} i_L(t)dt = 0$，且$i_L(0^-) = 0$

$\therefore i_L(0^+) = \dfrac{1}{L}$ （电感电流在冲激信号作用下，从零跃变到 $1/L$ ）

当$t \geq 0^+$时，$\delta(t) = 0$,此时电路是一个特殊的零输入响应，

由三要素公式得 $i_L(t) = \dfrac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}u(t) = h(t)$

- 单位冲激信号 $\delta(t)$作用于零状态系统的结果时赋予系统一个初始值。
- 系统的单位冲激响应 $h(t)$与系统的零输入响应具有相同的形式。

2.5.3 冲激响应的求取

一. 对于简单的电路，直接列微分方程求解*

二. 冲激响应是阶跃响应的导数

设线性时不变系统的激励为 $x(t)$，其零状态响应为 $y(t)$。

即 $x(t) \to y(t)$ 则 $x'(t) \to y'(t)$

若 $u(t) \to s(t)$ 则 $u'(t) = \delta(t) \to h(t) = s'(t)$

三. 求解描述系统的线性常微分方程

1. 简单的情况： 方程右边为 $x(t)$

2. 一般情况： 方程右边含有 $x(t)$的各阶导数 $\begin{cases} (1)\ 间接法 \\ (2)\ 直接法 \end{cases}$

2.5.3 冲激响应的求取

1．简单的情况： 方程右边为 $x(t)$

设描述n阶连续系统的微分方程为：

$$a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1 y'(t)+a_0 y(t)=x(t)$$

若 $x(t)=\delta(t)$，则 $y(t)=h_0(t)$ 即

$$a_n h_0^{(n)}(t)+a_{n-1}h_0^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1 h_0'(t)+a_0 h_0(t)=\delta(t)$$

$\because$ 当 $t>0$ 时，$\delta(t)=0$，即冲激响应 $h_0(t)$ 与微分方程的齐次解相同

$\therefore$ 只要找出该系统的 n 个初始条件，求解齐次微分方程就可以了。

2.5.3 冲激响应的求取

- 下面讨论如何找出这 ***n*** 个初始条件：

$$a_n h_0^{(n)}(t)+a_{n-1}h_0^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1h_0'(t)+a_0h_0(t)=\delta(t)$$

首先：因为是因果系统，所以$h_0(0^-)=h_0'(0^-)=\cdots=h_0^{(n-1)}(0^-)=0$

其次：为了使方程平衡，等式的左边应含有冲激函数项，并且只能包含在$h_0^{(n)}(t)$中。即:在$h_0^{(n)}(t)$中含有冲激函数项，$h_0^{(n-1)}(t)$中含有阶跃函数项（在$t=0$处不连续），在其余各项中含有t的正幂函数项（在$t=0$处连续）。

即：$h_0^{(n-1)}(0^+)\neq h_0^{(n-1)}(0^-)$

$$h_0^{(n-2)}(0^+)=h_0^{(n-2)}(0^-)=0,\cdots h'(0^+)=h'(0^-)=0,h(0^+)=h(0^-)=0$$

2.5.3 冲激响应的求取

对微分方程两边取积分

$$a_n\int_{0^-}^{0^+}h_0^{(n)}(t)dt+a_{n-1}\int_{0^-}^{0^+}h_0^{(n-1)}(t)dt+\cdots+a_0\int_{0^-}^{0^+}h_0(t)dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=1$$

$$a_n[h_0^{(n-1)}(0^+)-h_0^{(n-1)}(0^-)]+a_{n-1}[h_0^{(n-2)}(0^+)-h_0^{(n-2)}(0^-)]+\cdots=1$$

上式左边只有第一项不为零，其余各项都为零，即：

$$a_n[h_0^{(n-1)}(0^+)-h_0^{(n-1)}(0^-)]=1 \qquad \therefore h_0^{(n-1)}(0^+)=\frac{1}{a_n}$$

因此得到在 $t=0^+$ 时的 n 个初始条件为：

$$\begin{cases} h_0^{(n-2)}(0^+)=h_0^{(n-3)}(0^+)=\cdots=h_0(0^+)=0 \\ h_0^{(n-1)}(0^+)=\dfrac{1}{a_n} \end{cases}$$

代入初始条件，求解齐次微分方程，即可得到系统的冲激响应。

2.5.3 冲激响应的求取

- 根据特征根的不同类型，齐次解的通解形式有三种：

（1）特征根 λ_i 均为单根，则

$$h_0(t)=\left(\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}\right)u(t)$$

（2）特征根有p重根 λ_1，则对应项为

$$h_0(t)=\left(c_1 e^{\lambda_1 t}+c_2 t e^{\lambda_1 t}+\cdots+c_p t^{p-1} e^{\lambda_1 t}\right)u(t)$$

（3）特征根中有共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha+j\beta$，则对应项为

$$h_0(t)=\left(c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t+c_2 e^{\alpha t}\sin\beta t\right)u(t)$$

例：已知系统的微分方程如下，试求其冲激响应。

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=x(t)$$

解： $h''(t)+3h'(t)+2h(t)=\delta(t)$

即： $h''(t)+3h'(t)+2h(t)=0 \qquad t>0$

特征方程： $\lambda^2+3\lambda+2=0$

解得： $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2$

$\therefore$ 齐次微分方程的通解为: $h(t)=(k_1e^{-t}+k_2e^{-2t})u(t)$

代入初始条件：

$\begin{cases} h'(0^+)=1 \\ h(0^+)=0 \end{cases}$ 有： $\begin{cases} -k_1-2k_2=1 \\ k_1+k_2=0 \end{cases}$ 解得： $\begin{cases} k_1=1 \\ k_2=-1 \end{cases}$

$$\therefore h(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$$

2.5.3 冲激响应的求取

2．一般情况： 方程右边含有 $x(t)$的各阶导数

$$a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1 y'(t)+a_0 y(t)=b_m x^{(m)}(t)+b_{m-1}x^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1 x'(t)+b_0 x(t)$$

(1) 间接法

此时，系统的冲激响应所应当满足的微分方程为：

$$a_n h^{(n)}(t)+a_{n-1}h^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1 h'(t)+a_0 h(t)=b_m \delta^{(m)}(t)+b_{m-1}\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1 \delta'(t)+b_0 \delta(t)$$

为此可假设一个新的系统，其冲激响应时的方程为：

$$a_n h_0^{(n)}(t)+a_{n-1}h_0^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1 h_0'(t)+a_0 h_0(t)=\delta(t)$$

根据系统的线性和时不变性，有：

$$b_0\delta(t)\to b_0 h_0(t) \qquad b_j\delta^{(j)}(t)\to b_j h_0^{(j)}(t) \qquad \sum_{j=0}^{m} b_j\delta^{(j)}(t)\to \sum_{j=0}^{m} b_j h_0^{(j)}(t)$$

与原系统冲激响应时的方程相对比，得：

$$\boxed{h(t)=\sum_{j=0}^{m} b_j h_0^{(j)}(t)}$$

例2-5-2 已知描述某系统的微分方程如下，试求其冲激响应$h(t)$。 $2y''(t)+4y'(t)+4y(t)=2x'(t)+x(t)$

解：设 $2h_0''(t)+4h_0'(t)+4h_0(t)=\delta(t)$

其特征根为 $\lambda_{1,2}=-1\pm j$

则 $h_0(t)=(k_1e^{-t}\sin t+k_2e^{-t}\cos t)u(t)$

代入初始条件：

$$\begin{cases} h_0'(0^+)=\dfrac{1}{2} \\ h_0(0^+)=0 \end{cases}$$

有：

$$\begin{cases} h_0(0^+)=k_2=0 \\ h_0'(0^+)=k_1-k_2=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} k_1=\dfrac{1}{2} \\ k_2=0 \end{cases}$$

故 $h_0(t)=\dfrac{1}{2}e^{-t}\sin t u(t)$

$$h(t)=2h'_0(t)+h_0(t)=-e^{-t}\sin t u(t)+e^{-t}\cos t u(t)+\frac{1}{2}e^{-t}\sin t u(t)$$

$$=e^{-t}\cos t u(t)-\frac{1}{2}e^{-t}\sin t u(t)$$

(2) 直接法

例2-5-3 已知某线性时不变系统的微分方程为

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=3x'(t)+2x(t)$$

试求系统的冲激响应 $h(t)$。

解： $h''(t)+5h'(t)+6h(t)=3\delta'(t)+2\delta(t)$

其特征根为 $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=-3$

则 $h(t)=(k_1e^{-2t}+k_2e^{-3t})u(t)$

$$h'(t)=h'(t)=(k_1+k_2)\delta(t)+(-2k_1e^{-2t}-3k_2e^{-3t})u(t)$$

$$h''(t)=(k_1+k_2)\delta'(t)+(-2k_1-3k_2)\delta(t)+(4k_1e^{-2t}+9k_2e^{-3t})u(t)$$

代入原方程，经整理得：

$$(k_1+k_2)\delta'(t)+(3k_1+2k_2)\delta(t)=3\delta'(t)+2\delta(t)$$

则有 $\begin{cases}k_1+k_2=3\\3k_1+2k_2=2\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=-4\\k_2=7\end{cases}$

$\therefore\quad h(t)=(7e^{-3t}-4e^{-2t})u(t)$

2.5.3 冲激响应的求取

$$a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1 y'(t)+a_0 y(t)=b_m x^{(m)}(t)+b_{m-1}x^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1 x'(t)+b_0 x(t)$$

注意当 $n \le m$ 时，$h(t)$ 中含有 $\delta(t)$ 直至其 m-n 阶导数项。

当 $n=m$ 时，　　$h(t)=c\delta(t)+(\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t})u(t)$

当 $n<m$ 时，　　$h(t)$ 中会包含冲激函数的导数

与直接法相比，间接法的优点是：求 $h_0(t)$ 时，只可能 $n>m$，不需要考虑其它情况，并且其 n 个初始条件是固定不变的，从而给计算带来了方便。

- 其它求解系统冲激响应的方法还有：

  变换域的方法：傅立叶变换法、拉普拉斯变换法

  实验法：观察、记录系统在窄脉冲信号激励下的响应曲线或单位阶跃响应曲线。

第二章 连续时间信号与系统的时域分析

- 2.1 典型的连续时间信号
- 2.2 连续时间信号的基本运算
- 2.3 信号的时域分解
- 2.4 连续时间系统的零输入响应
- 2.5 连续系统的冲激响应
- 2.6 连续系统的零状态响应
- 2.7 连续时间系统的全响应
- 作业

2.6.1 卷积分析法的引出

2.6.2 确定卷积积分限的公式

2.6.3 卷积的图解

2.6.3 卷积积分的性质

2.6.1 卷积分析法的引出

线性时不变连续系统的数学模型：

线性常系数微分方程

- 时域分析

1. 计算零输入响应：求解齐次解

2. 计算零状态响应：

①经典法：求解非齐次解

②卷积分析法

- 变换域分析（第3～4章介绍）

2.6.1 卷积分析法的引出

对于线性时不变系统，设 $x(t) \rightarrow \boxed{S\{q_n(0^-)=0\}} \rightarrow y(t)$

则当

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

$$\delta(t-\tau) \rightarrow h(t-\tau)$$

$$[x(\tau)d\tau]\delta(t-\tau) \rightarrow [x(\tau)d\tau]h(t-\tau)$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=y(t)$$

记作 $y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$ 称为$x(t)$与$h(t)$的卷积积分

过程：

①首先把任意信号分解为基本单元信号（这里是指冲激信号）；
②然后研究系统对基本单元信号的零状态响应（这里是指冲激响应）；
③再根据线性时不变系统的根本规律，把这些基本单元信号单独作用于系统时所引起的零状态响应迭加起来。

2.6.1 卷积分析法的引出

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

解释：

1. 计算卷积时，将$x(t)$换成$x(\tau)$，$h(t)$换成$h(t-\tau)$。

2. τ是积分变量，表示冲激信号出现的时刻，可以在$(-\infty,\infty)$连续变化。

3. t是积分参变量，在积分 过程中可视为定值，表 示所要考察的响应时刻。

4. 卷积值$y(t)$是时间t的函数，即随着要考察的响应时刻的变化，卷积值也在变化。

2.6.2 确定卷积积分限的公式

当$x(t)$和$h(t)$都是有始函数时，设

$$x(t)=f_1(t)u(t-t_1),\qquad h(t)=f_2(t)u(t-t_2)$$

则 $$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)u(\tau-t_1)f_2(t-\tau)u(t-\tau-t_2)d\tau$$

考虑到$\tau-t_1<0$（即$\tau<t_1$）时，$u(\tau-t_1)=0$

以及$t-\tau-t_2<0$（即$\tau>t-t_2$）时，$u(t-\tau-t_2)=0$

(1). 只有当 $t_1<\tau<t-t_2$时，被积函数才可能不为零。因此，积分下限应当为t_1，上限应当为 $t-t_2$。其物理意义是：响应$y(t)$是由激励在（t_1，$t-t_2$）期间所有分量的共同作用所引起的。

(2). 对于而言，应当满足$t>t_1+t_2$时$y(t)$才可能不为零。其物理意义是：t_1时刻的激励所引起的响应要再到t_1+t_2时间才能出现，即响应$y(t)$出现的最早时刻为t_1+t_2。

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{t_1}^{t-t_2}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\cdot u(t-t_1-t_2)$$

例：试计算卷积：$e^{-t}u(t-1)*e^{-t}u(t-2)$

解：原式$=\int_1^{t-2} e^{-\tau}e^{-(t-\tau)}d\tau \cdot u(t-3)$

$$=\int_1^{t-2} e^{-t}d\tau \cdot u(t-3) == e^{-t}\int_1^{t-2} 1\,d\tau \cdot u(t-3)$$

$$=e^{-t}\tau\Big|_1^{t-2} u(t-3) = (t-3)e^{-t}u(t-3)$$

例：已知激励信号 $x(t)=1$，系统的冲激响应 $h(t)=e^{-t}u(t)$，试用卷积分析法求其零 状态响应。

解：$x(t)=1=1\cdot u(t+\infty)=1\cdot u(t-t_1)$，其中$t_1=-\infty$，

则 $y(t)=x(t)*h(t)=\int_{t_1}^{t-t_2} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \cdot u(t-t_1-t_2)$

$$=\int_{-\infty}^{t} 1\cdot e^{-(t-\tau)}d\tau \cdot u(t+\infty) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}d\tau = e^{-t}e^{\tau}\Big|_{-\infty}^{t} = 1$$

2.6.3 卷积的图解

图形卷积能够直观地理解卷积积分的计算过程，有助于确定积分的上下限。

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

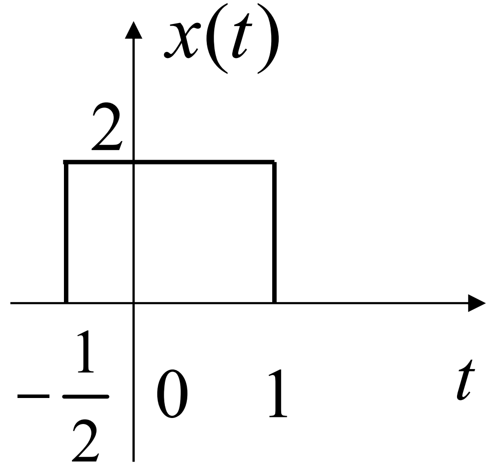
归纳起来，卷积的图解过程有五个步骤：

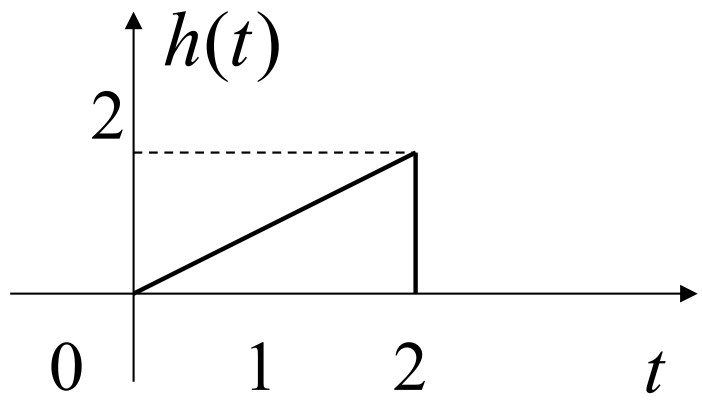
1. 换元：$t\to\tau$： $x(t)\to x(\tau)$， $h(t)\to h(\tau)$
2. 折叠：$h(\tau)\to h(-\tau)$
3. 位移： 把$h(-\tau)$平移一个t值 $\to h(t-\tau)$;
4. 相乘： 将$x(\tau)$和$h(t-\tau)$相乘；
5. 积分： $x(\tau)$和$h(t-\tau)$乘积曲线与时间轴之间 的面积即为 t 时刻的卷积值。

【例2-6-3】 已知 $x(t)=2u\left(t+\frac{1}{2}\right)-2u(t-1)$

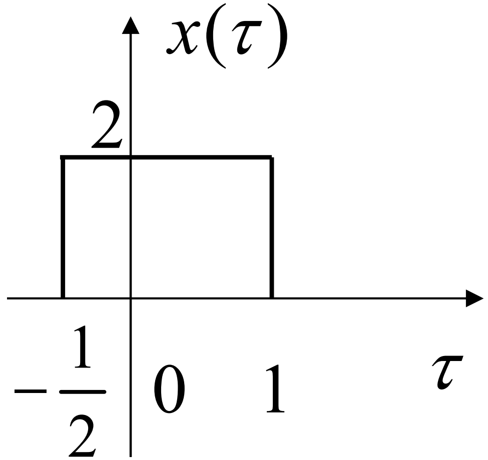
$h(t)=t\left[u(t)-u(t-2)\right]$，波形分别如图所示，

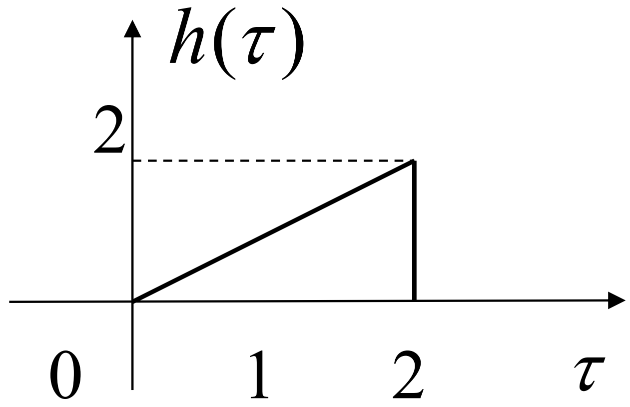
计算卷积 $y(t)=x(t)*h(t)$



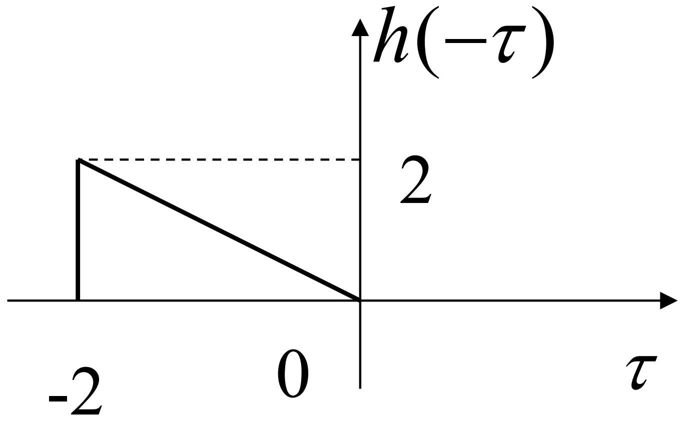


解：**(1)** 换元

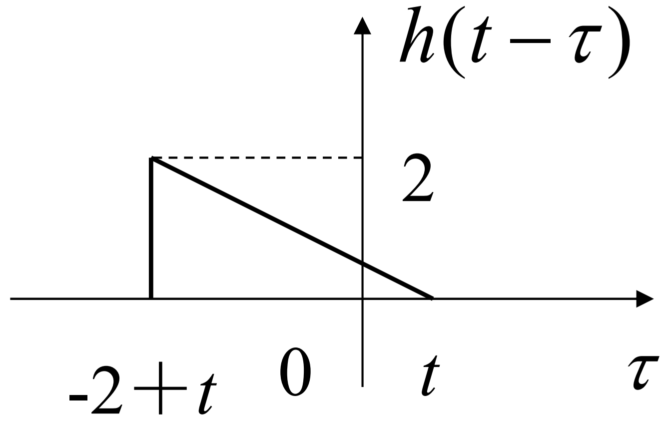




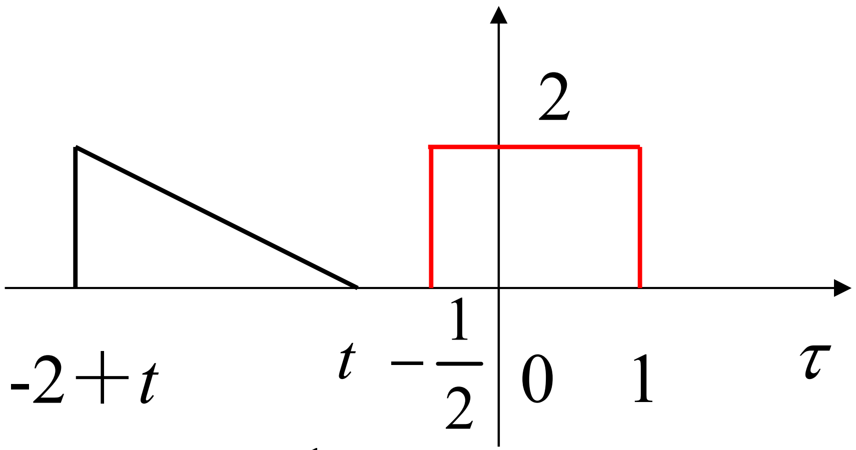
(2) 折叠

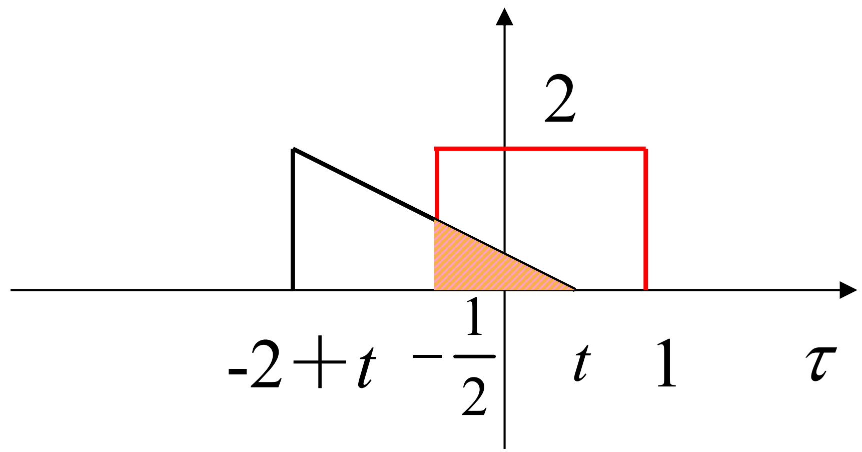


(3) 位移



(4)相乘、积分

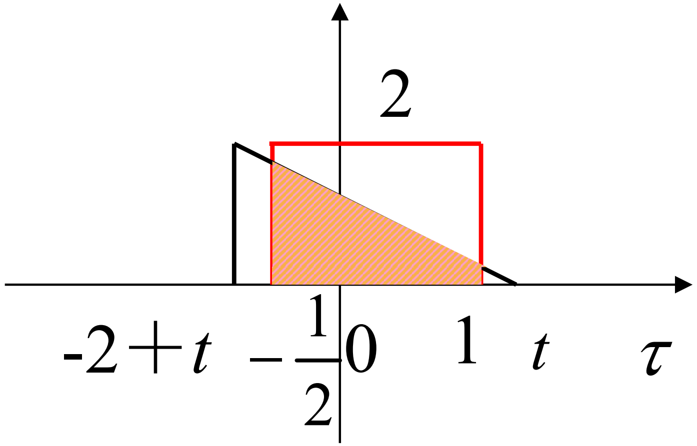




当 $t<-\dfrac{1}{2}$， $y(t)=0$

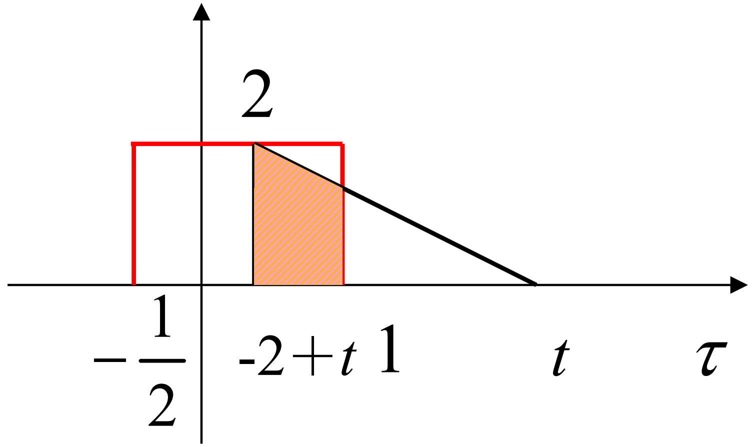
当 $-\dfrac{1}{2}\leqslant t<1$

$$y(t)=\int_{-\frac{1}{2}}^{t}2\times(t-\tau)\mathrm{d}\tau=t^{2}+t+\frac{1}{4}$$



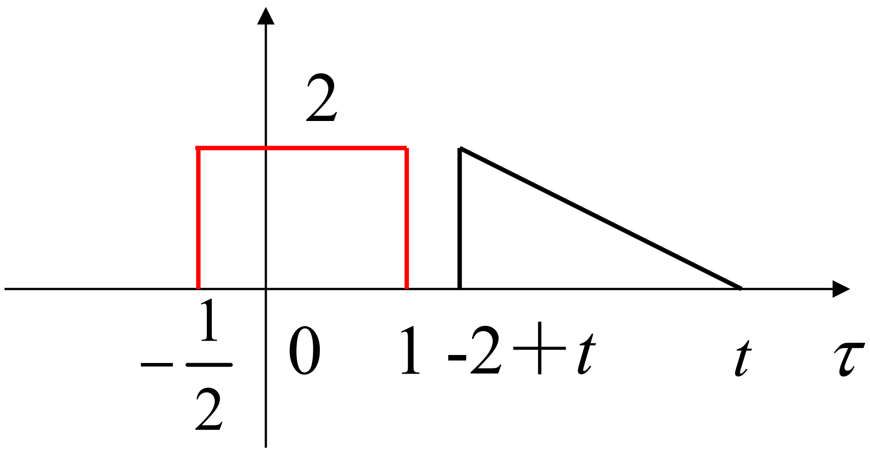
当 $1\leqslant t<\frac{3}{2}$

$$y(t)=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}2\times(t-\tau)\mathrm{d}\tau=3t-\frac{3}{4}$$

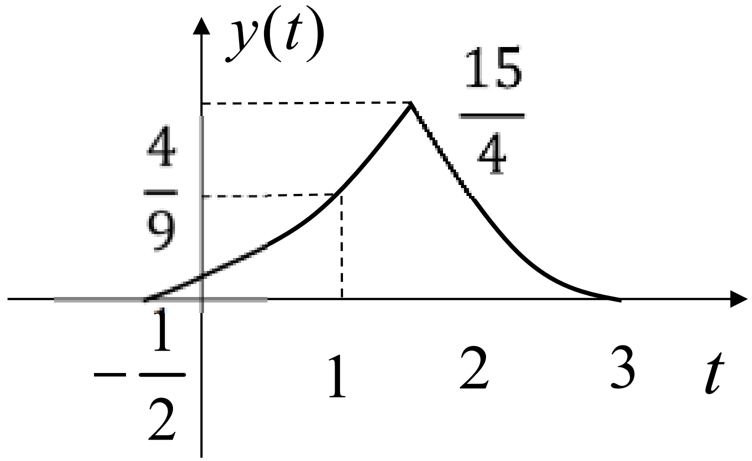


当 $\frac{3}{2}\leqslant t<3$

$$y(t)=\int_{t-2}^{1}2\times(t-\tau)\mathrm{d}\tau=-t^2+2t+3$$



当 $t\geq 3$, $y(t)=0$



$y(t)$的曲线

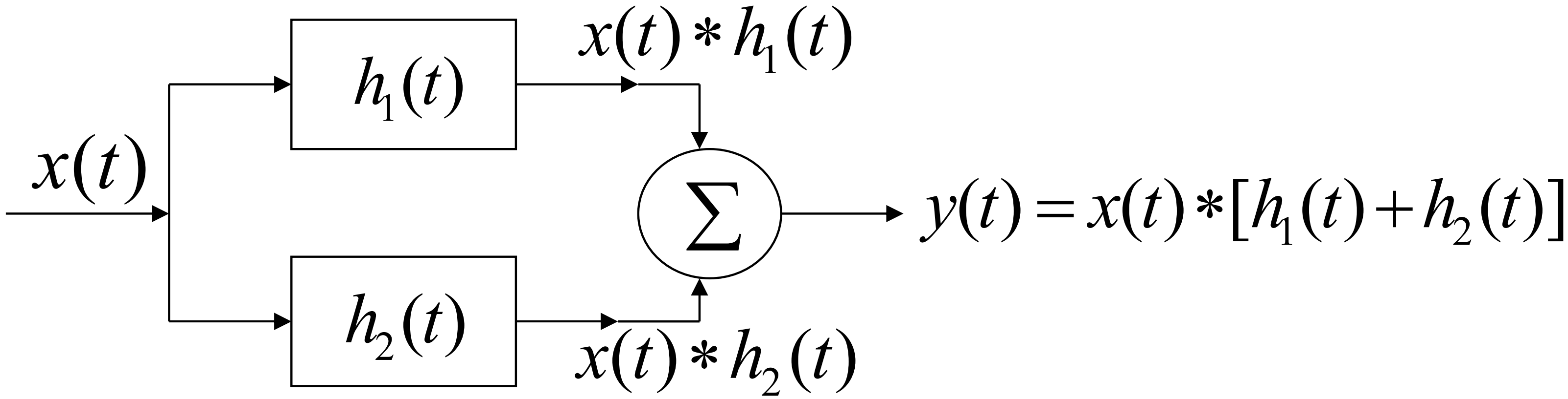
2.6.4 卷积积分的性质

1. 卷积代数

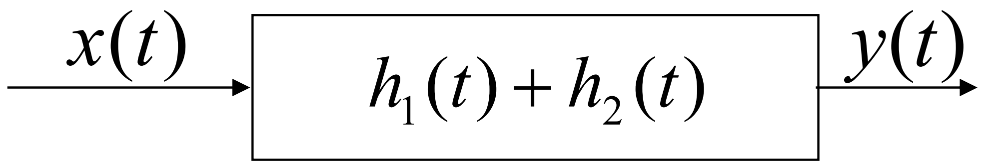
(1) 交换律 $x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$

(2) 分配律 $x(t)*[h_1(t)+h_2(t)]=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$

例如：两个子系统并联



等效为：

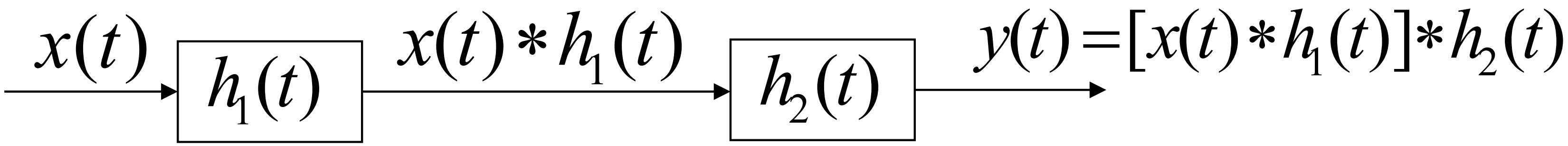


子系统并联时，总系统的冲激响应等于各子系统冲激响应之和。

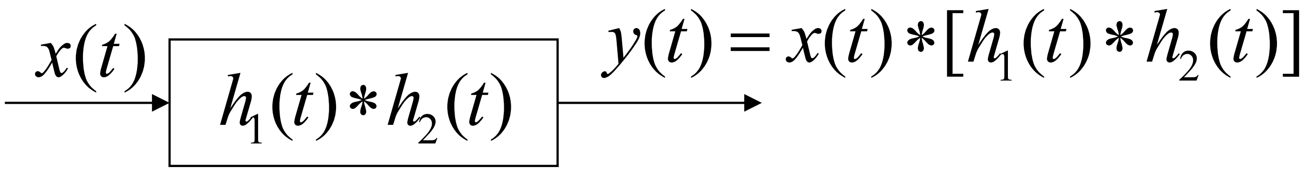
2.6.4 卷积积分的性质

(3) 结合律 $[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$

例如：两个子系统级联



等效为：



子系统级联时，总的冲激响应等于各子系统冲激响应的卷积。

2. 卷积的微分与积分

设 $y(t)=x(t)*h(t)$，有

（1） 卷积的微分性质

$$y'(t)=x(t)*h'(t)=x'(t)*h(t)$$

证明：$y'(t)=\dfrac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h'(t-\tau)d\tau$

$$=x(t)*h'(t)$$

同理可证: $y'(t)=x'(t)*h(t)$

2.6.4 卷积积分的性质

（2） 卷积的积分性质

$$y^{(-1)}(t) = x(t) * h^{(-1)}(t) = x^{(-1)}(t) * h(t)$$

证明：
$$y^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(\lambda-\tau)d\tau\right]d\lambda$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{t} h(\lambda-\tau)d\lambda\right]d\tau$$

设 $\lambda-\tau=\lambda_1$，则 $\int_{-\infty}^{t} h(\lambda-\tau)d\lambda = \int_{-\infty}^{t-\tau} h(\lambda_1)d\lambda_1 = h^{(-1)}(t-\tau)$

所以 $y^{(-1)}(t) = x(t) * h^{(-1)}(t)$

同理可证 $y^{(-1)}(t) = x^{(-1)}(t) * h(t)$

2.6.4 卷积积分的性质

(3) 卷积的微积分性质

$$y(t)=x'(t)*h^{(-1)}(t)=x^{(-1)}(t)*h'(t)$$

条件：应用微积分性质时，被求导的函数在 $t=-\infty$ 处应为零值，或者被积分的函数在 $(-\infty,\infty)$ 区间的积分值（即函数波形的净面积）为零值。

$$\because x^{(-1)}(t)*h(t)=x(t)*h^{(-1)}(t)$$

证明：

$$y(t)=x(t)*h(t)=\left\{\int_{-\infty}^{t}x'(\tau)d\tau+x(-\infty)\right\}*h(t)=x'(t)*h^{(-1)}(t)+h(t)*x(-\infty)$$

$$=x^{(1)}(t)*h^{(-1)}(t)+\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(-\infty)d\tau=x^{(1)}(t)*h^{(-1)}(t)+x(-\infty)\int_{-\infty}^{\infty}h(t)dt$$

$\therefore$只要 $x(-\infty)=0$，或者$\int_{-\infty}^{\infty}h(t)dt=0$,则 $y(t)=x^{(1)}(t)*h^{(-1)}(t)$

同理，$x(t)$和$h(t)$交换位置，可得 $y(t)=x^{(-1)}(t)*h^{(1)}(t)$

★此性质可以推广为： $y(t)=x^{(i)}(t)*h^{(-i)}(t) \quad i$ 为整数

当 i 为正整数时，表示求导数的阶数，当 i 为负整数时，表示求重积分的次数。

★卷积的微积分性质还可以进一步推广为：

$$y^{(i+j)}(t)=x^{(i)}(t)*h^{(j)}(t) \quad i,j\text{为整数}$$

式中，i,j和$i+j$为正整数时，表示求导的阶数，为负整数时，表示重积分的次数。

例如：$y(t)=x(t)*h(t)=x'(t)*h^{(-1)}(t)=x'(t)*s(t)$

即 $y(t)=x'(t)*s(t)$ ⟶ 杜阿密尔积分

例 计算常数 K与函数 $f(t)$的卷积积分。

解： $K*f(t)=K'*f^{(-1)}(t)=0$ 错误！不满足卷积微积分性质条件！

正解：由卷积定义得 $K*f(t)=f(t)*K=\int_{-\infty}^{\infty}[f(\tau)\cdot K]d\tau=K\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)d\tau$

2.6.4 卷积积分的性质

3. 含有冲激函数的卷积

$$x(t)*\delta(t)=x(t)$$

$$x(t)*\delta(t-t_1)=x(t-t_1)$$ 卷积的重现性质

证明：利用冲激函数的定义有

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=x(t)*\delta(t)$$

或者利用卷积的交换律及冲激函数的筛选性质，有

$$x(t)*\delta(t)=\delta(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)x(t-\tau)d\tau=x(t-\tau)\Big|_{\tau=0}=x(t)$$

同理可证 $x(t)*\delta(t-t_1)=x(t-t_1)$

2.6.4 卷积积分的性质

利用微积分性质还可以得到

$$x(t)*\delta'(t)=x'(t)$$

$$x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$

推广到一般情况，有

$$x(t)*\delta^{(i)}(t)=x^{(i)}(t)$$

$$x(t)*\delta^{(i)}(t-t_1)=x^{(i)}(t-t_1)$$

4. 卷积的时移

若 $y(t)=x(t)*h(t)$

则 $x(t)*h(t-t_0)=x(t-t_0)*h(t)=y(t-t_0)$ ，t_0为实常数

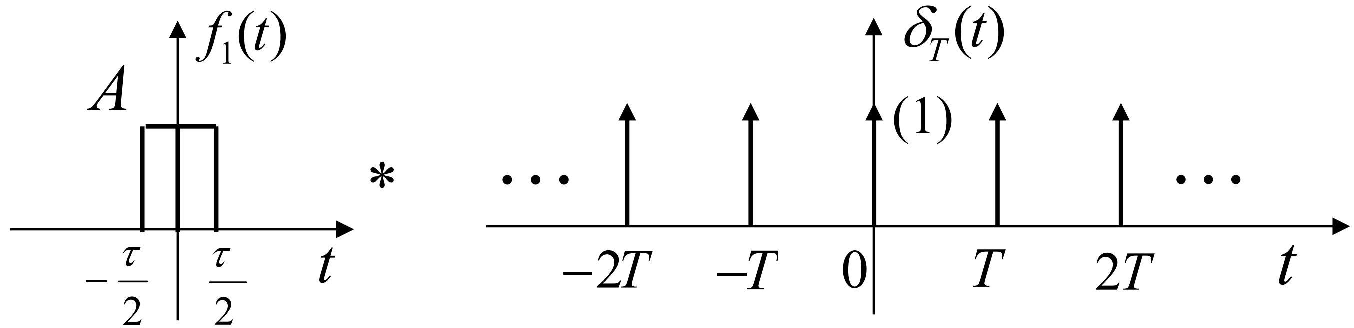
证明：$x(t)*h(t-t_0)=x(t)*[h(t)*\delta(t-t_0)]$

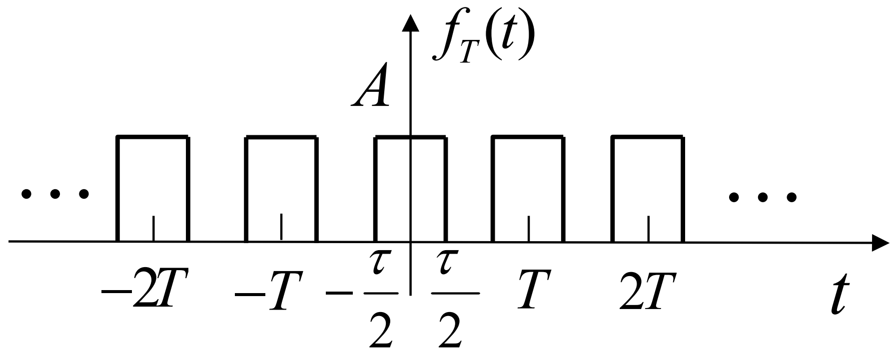
$$=[x(t)*h(t)]*\delta(t-t_0)=y(t)*\delta(t-t_0)=y(t-t_0)$$

同理 $x(t-t_1)*h(t-t_2)=x(t-t_2)*h(t-t_1)=y(t-t_1-t_2)$

2.6.4 卷积积分的性质

利用卷积的重现性质可以通过卷积运算产生周期信号：





$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$f_T(t) = f_1(t) * \delta_T(t) = f_1(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f_1(t) * \delta(t - nT)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_1(t - nT)$$

卷积的重现性质

$$x(t) * \delta(t - t_1) = x(t - t_1)$$

2.6.4 卷积积分的性质

★利用卷积的性质能大大简化卷积计算

【例2-6-4】 已知 $x(t)=\sin tu(t)$ ，$h(t)=\delta'(t)+u(t)$，试求

$$x(t)*h(t)$$

解：$x(t)*h(t)=\sin tu(t)*[\delta'(t)+u(t)]$

$$=\sin tu(t)*\delta'(t)+\sin tu(t)*u(t)$$

$$=\frac{d}{dt}[\sin tu(t)]+[\int_0^t \sin\tau d\tau]u(t)$$

$$=\sin t\delta(t)+\cos tu(t)+[1-\cos t]u(t)$$

$$=u(t)$$

例： 已知 $x(t)=e^{-t}u(t)$， $h(t)=u(t)-u(t-2)$，

试求$x(t)*h(t)$。

解：$x(t)*h(t)=x^{(-1)}(t)*h'(t)=x^{(-1)}(t)*[\delta(t)-\delta(t-2)]$

$$=x^{(-1)}(t)-x^{(-1)}(t-2)$$

$$x^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-\tau}u(\tau)d\tau=\left[\int_{-\infty}^{t}e^{-\tau}u(\tau)d\tau\right]*\delta(t)$$

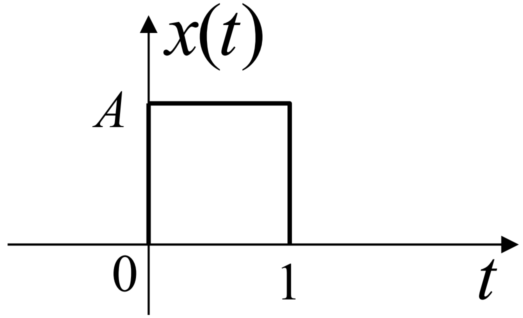
$$=e^{-t}u(t)*u(t)=\int_{0}^{t}e^{-\tau}d\tau\cdot u(t)$$

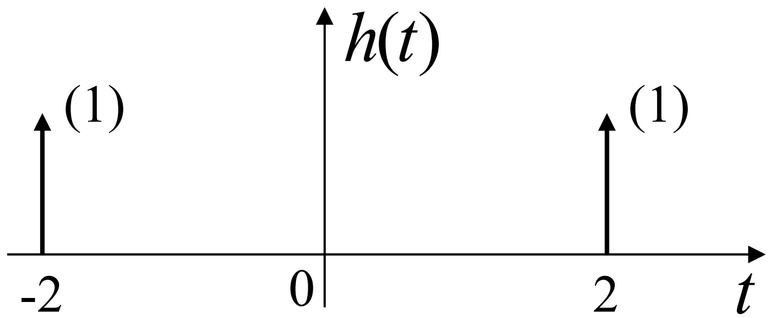
$$=-e^{-\tau}\Big|_{0}^{t}u(\tau)=(1-e^{-t})u(t)$$

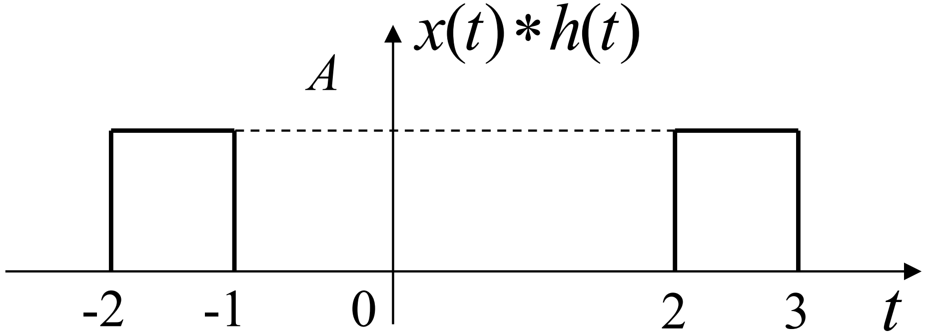
$$x(t)*h(t)=x^{(-1)}(t)-x^{(-1)}(t-2)$$

$$=(1-e^{-t})u(t)-[1-e^{-(t-2)}]u(t-2)$$

例： 已知系统输入$x(t)$，冲激响应$h(t)$如图所示，试求 $x(t)*h(t)$。



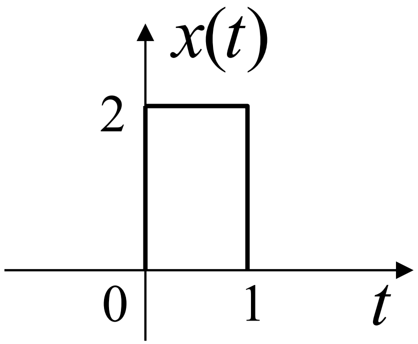


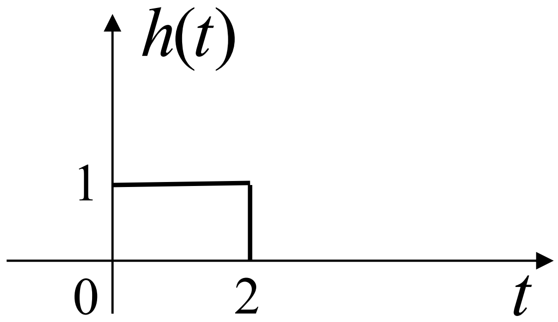


解：
$$x(t)*h(t)=x(t)*\left[\delta(t+2)+\delta(t-2)\right]$$
$$=x(t)*\delta(t+2)+x(t)*\delta(t-2)=x(t+2)+x(t-2)$$

【例】已知系统输入$x(t)$，冲激响应$h(t)$如图所示

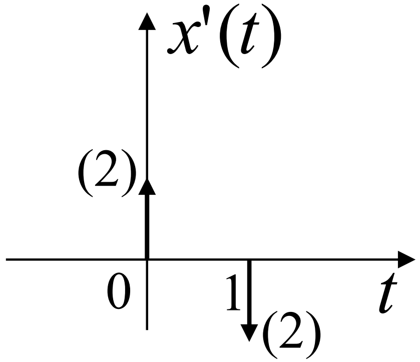
试求 $x(t)*h(t)$。

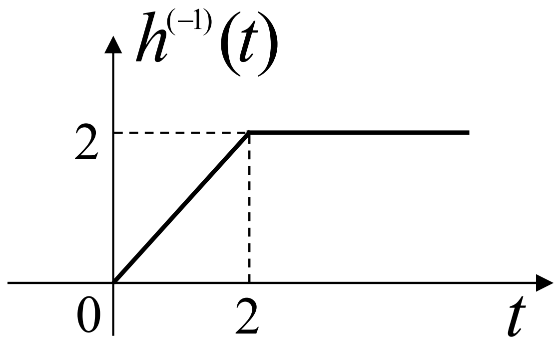


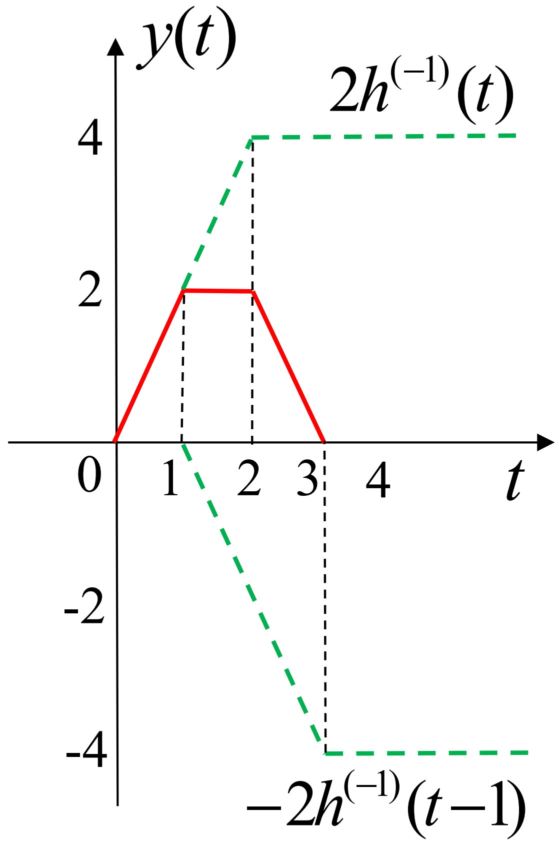


解：$y(t)=x(t)*h(t)=x'(t)*h^{(-1)}(t)$

$$=2h^{(-1)}(t)-2h^{(-1)}(t-1)$$







【例】计算下列卷积积分：

(1) $u(t+1)*u(t-2)$

(2) $tu(t-1)*\delta''(t-2)$

解 (1)应用卷积的重现性质，有

$$u(t+1)*u(t-2)=u(t)*\delta(t+1)*u(t)*\delta(t-2)$$

$$=u(t)*u(t)*\delta(t-1)=tu(t)*\delta(t-1)=(t-1)u(t-1)$$

(2)应用卷积的重现性质和微分性质，有

$$tu(t-1)*\delta''(t-2)=[tu(t-1)]''*\delta(t-2)$$

$$=[u(t-1)+t\delta(t-1)]'*\delta(t-2)$$

$$=[u(t-1)+\delta(t-1)]'*\delta(t-2)$$

$$=[\delta(t-1)+\delta'(t-1)]*\delta(t-2)=\delta(t-3)+\delta'(t-3)$$

例：已知 $x_1(t) * tu(t) = (t + e^{-t} - 1)u(t)$, 试求 $x_1(t)$。

解：对原方程两边求导，有

$$\frac{d^2}{dt^2}[x_1(t) * tu(t)] = \frac{d^2}{dt^2}[(t + e^{-t} - 1)u(t)]$$

即 $$x_1(t) * \frac{d^2}{dt^2}[tu(t)] = \left[(1 - e^{-t})u(t) + (t + e^{-t} - 1)\delta(t)\right]'$$

即 $$x_1(t) * \delta(t) = e^{-t}u(t)$$

$$\therefore\ x_1(t) = e^{-t}u(t)$$

第二章 连续时间信号与系统的时域分析

- 2.1 典型的连续时间信号
- 2.2 连续时间信号的基本运算
- 2.3 信号的时域分解
- 2.4 连续时间系统的零输入响应
- 2.5 连续系统的冲激响应
- 2.6 连续系统的零状态响应
- 2.7 连续时间系统的全响应
- 作业

【例2-7-1】已知某线性时不变系统的微分方程为

$y'(t)+2y(t)=x(t)$ ，激励 $x(t)=(1+\mathrm{e}^{-t})u(t)$ ，初始状态 $y(0^{-})=3$ ，求系统的全响应 y(t)。

【解】方程的特征根为 $\lambda=-2$

容易求得冲激响应 $h(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$

由卷积分析法可求得零状态响应

$$y_{\mathrm{zs}}(t)=x(t)*h(t)=(1+\mathrm{e}^{-t})u(t)*\mathrm{e}^{-2t}u(t)=\left(\frac{1}{2}+\mathrm{e}^{-t}-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right)u(t)$$

零输入响应对应于齐次微分方程的解，因而与冲激响应有相同的形式，即

$$y_{\mathrm{zi}}(t)=c\mathrm{e}^{-2t}$$

将初始状态 $y(0^-)=3$ 代入，得c＝3，即

$$y_{zi}(t)=3\mathrm{e}^{-2t} \qquad t\geqslant 0$$

所以系统的全响应

$$y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t)=\left(\frac{1}{2}+\mathrm{e}^{-t}-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right)u(t)+3\mathrm{e}^{-2t}=\frac{1}{2}+\mathrm{e}^{-t}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t} \qquad t\geqslant 0$$

需要说明的是，当t＜0时，零状态响应 $y_{zs}(t)=0$

所以后缀为u(t)或注明t≥0。

当t＜0时，零输入响应 $y_{zi}(t)$ 不一定为0，所以应注明t≥0。

同样地，全响应也应注明t≥0。

系统全响应的分解

- 全响应 = 零输入响应 + 零状态响应
- 全响应 = 自然(固有)响应(通解)+ 强制响应(特解)

  自然响应：齐次微分(差分)方程的通解

  强制响应：非齐次微分(差分)方程的特解，是与激励同模式的部分。

- 全响应 = 暂态响应 + 稳态响应

  暂态响应：$t \to \infty \left(k \to \infty\right)$时衰减为0的部分

  稳态响应：$t \to \infty \left(k \to \infty\right)$时依然存在的部分

当系统的激励与零输入响应都含有函数形式相同的项时，零状态响应中会出现新的一项，下面举例说明。

【例】 已知某线性时不变系统的微分方程为

$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=x(t)$，激励 $x(t)=(1+\mathrm{e}^{-t})u(t)$，

初始状态 $y(0^-)=1$，$y'(0^-)=1$，求系统的全响应 $y(t)$。

解 方程的特征根为 $\lambda_{1,2}=-1,\ -2$

零输入响应的形式为 $y_{zi}(t)=c_1\mathrm{e}^{-t}+c_2\mathrm{e}^{-2t}$

代入初始条件 $y(0^-)=1$，$y'(0^-)=1$

解得 $y_{zi}(t)=3\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-2t} \qquad t\geqslant 0$

冲激响应为（求解过程略）$h(t)=\left(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\right)u(t)$

由卷积分析法可求得零状态响应

$$y_{zs}(t)=x(t)*h(t)=(1+e^{-t})u(t)*\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+te^{-t}\right)u(t)$$

系统的全响应

$$y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t)=\frac{1}{2}+e^{-t}-\frac{3}{2}e^{-2t}+te^{-t}\qquad t\geqslant 0$$

其中 te^{-t}是由于激励中的e^{-t}项与自然响应的e^{-t}项函数形式相同而新出现的一项。

e^{-t}中既有自然响应分量又有强制响应分量；

$\dfrac{1}{2}+te^{-t}$ 是强制响应的一部分；

$-\dfrac{3}{2}e^{-2t}$ 是自然响应的一部分；

稳态响应为 $\dfrac{1}{2}$；

暂态响应为 $e^{-t}-\dfrac{3}{2}e^{-2t}+te^{-t}$ 。

本章要点

- 1.冲激函数的性质
  - 筛选性 加权性 是阶跃函数的导数 是偶函数 尺度变换
- 2.冲激响应的求解
  - 对阶跃响应求导 从微分方程求解（间接法）
- 3.卷积积分
  - 卷积的定义 确定卷积积分限的公式
- 4.图解法确定卷积积分限
- 5.卷积积分的性质
  - 卷积代数 卷积的微分与积分 含有冲激函数的卷积

作　业

2.1-2.2:

2-1(2、3、6、7)，　2-5(2、4、5),2-6(a)，

2-7(2、3、6)，　　2-8(2、5、8)

2.5-2.6:

2-10，　　2-13(2、3)，2-14(1)，　　2-20(b)，

2-21（c），2-25

2.7:

2-27（1）